Ecuación de movimiento

Ecuación escalar de onda

La energía producida por un terremoto se propaga en el interior terrestre en todas las direcciones en forma de ondas elásticas.

Analizaremos la propagación de esas ondas en un medio elástico, isótropo y homogéneo.

Conociendo la tensiones actuantes (σ_{ij}), las deformaciones experimentadas (ε_{ij}), la relación entre las tensiones y deformaciones (Ley de Hooke) y los módulos elásticos planteamos la ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento para un medio continuo (expresa la 2º ley de Newton F=ma) en términos de las fuerzas de superficie y de cuerpo

$$\underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}}_{\text{fuerzas de superficie}} + \underbrace{f_i(\mathbf{x}, t)}_{\text{fuerzas de cuerpo}} = \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Si no se aplican fuerzas de cuerpo, tenemos la ecuación homogénea de movimiento, (donde homogéneo refiere a la falta de fuerza)

$$\boxed{\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}}$$

Esta ecuación describe la propagación de las ondas sísmicas excepto en la región fuente

La ecuación de movimiento tiene como solución una ecuación de onda que describe los dos tipos de ondas sísmicas (o elásticas) que se propagan, las ondas compresionales y las ondas de corte.

Estas ondas se propagan de manera diferente, con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material.

Para demostrarlo consideramos una región homogénea, sin fuentes sísmicas.

Cuando la energía se propaga lejos de la fuente, la relación entre tensión y desplazamiento está dado por la ecuación homogénea de movimiento que se puede escribir y resolver en función de los desplazamientos.

Aunque la ecuación no depende de las constantes elásticas , la solución si.

Reemplazando tensiones y deformaciones en:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Podemos escribir:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Ecuación de movimiento para un medio elástico e isótropo en términos del desplazamiento que depende de la posición y el tiempo, con:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z) \longrightarrow$$

Laplaciano del campo de desplazamiento

Para poder resolver esta ecuación, expresamos el campo de desplazamiento en término de dos funciones potenciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Upsilon(\mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla \phi(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}, t)}$$

Gradiente de un potencial escalar, cuyo rotor es nulo

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Da origen a ondas compresionales

Rotor de un potencial vectorial, cuya divergencia es nula

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) = 0$$

Da origen a ondas de corte

Sustituyendo la expresión del desplazamiento en la ecuación, queda:

$$\nabla\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) - \rho\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}\right] = -\nabla \times \left[\mu\nabla^2\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}, t) - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}\right]$$

Una solución posible es cuando ambos términos entre corchetes son cero. En ese caso tenemos dos ecuaciones de onda, una para cada potencial.

El potencial escalar satisface:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Con velocidad

$$\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$$

Esta solución corresponde a ondas compresionales u ondas P

El potencial vectorial satisface:

$$\nabla^2\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Con velocidad

$$\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$$

Esta solución corresponde a ondas de corte u ondas S