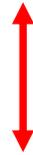
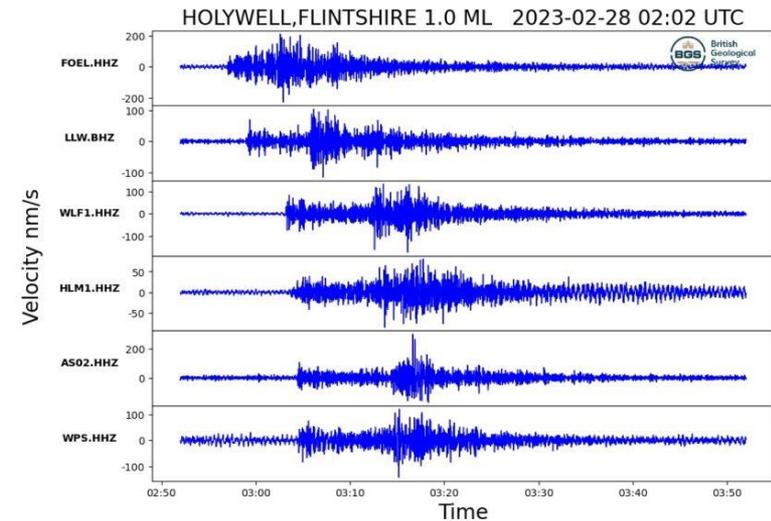


# TEORÍA MEDIO ELÁSTICO

Ecuaciones de la Mecánica  
Medio continuo deformable

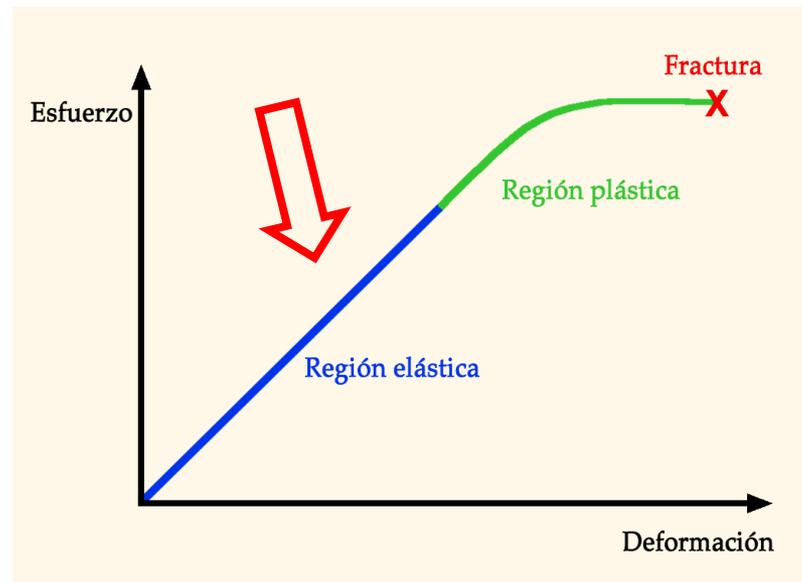


Terremotos



# Tensiones

# Deformaciones



Consideramos que la Tierra es un medio elástico y continuo sometido a fuerzas:

- Tensión
- Deformación
- Desplazamiento

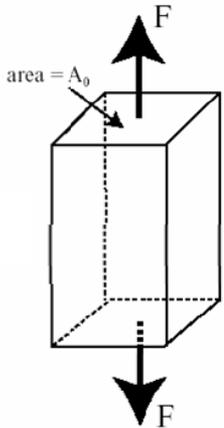
Elementos constituyentes son funciones de las coordenadas y del tiempo



Consideramos que la Tierra es un medio elástico y continuo sometido a fuerzas:

- Tensión
- Deformación
- Desplazamiento

Elementos constituyentes son funciones de las coordenadas y del tiempo

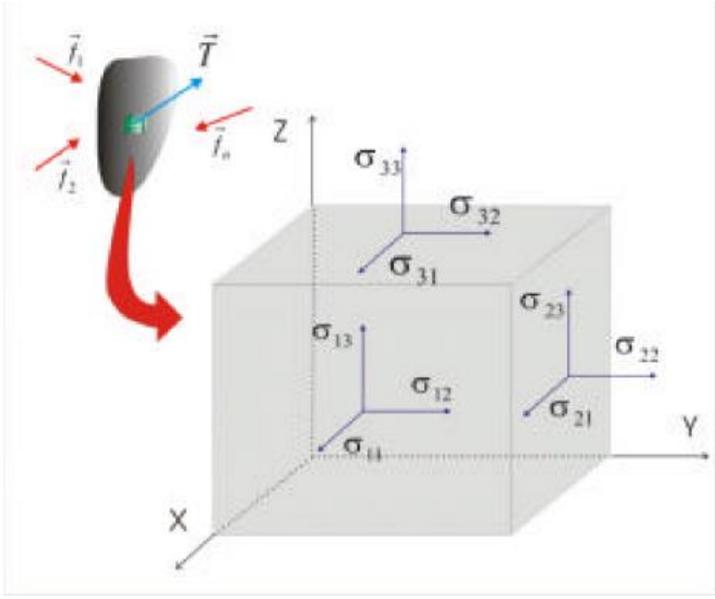


- Tensión normal: Intensidad de fuerza normal por unidad de superficie

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \text{Unidades: Pa (N/m}^2\text{) (suelen utilizarse los MPa)}$$



# TENSOR DE TENSIONES (DE 2º ORDEN)



cara      dirección  

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} =$$
Componentes tangenciales  

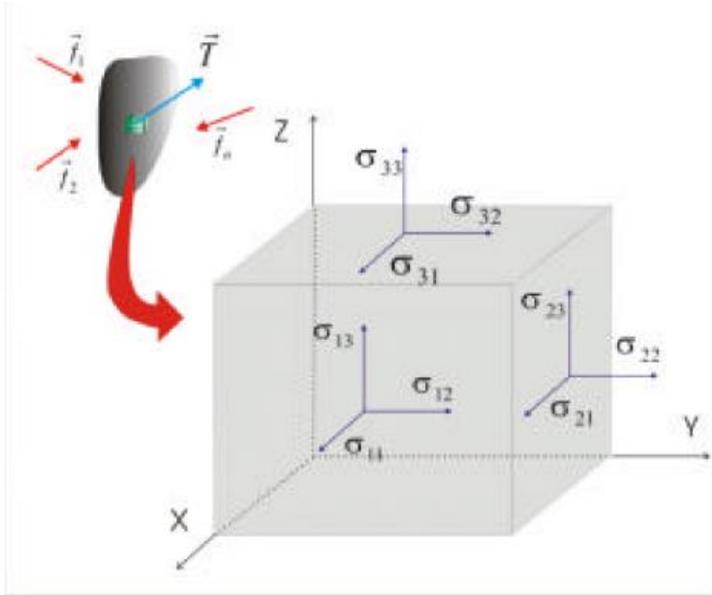
$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$
Componentes normales  

$$= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Nos permite conocer el estado de tensión de un cuerpo o región



# TENSOR DE TENSIONES (DE 2º ORDEN)



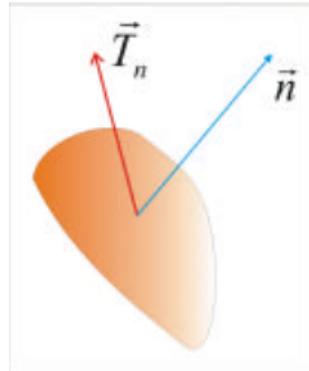
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

(The top-right triangle of the first matrix is circled in yellow and labeled "Componentes tangenciales". The bottom-left triangle is labeled "Componentes normales".)

cara      dirección

Nos permite conocer el estado de tensión de un cuerpo o región

**Fórmula de Cauchy:** Nos permite conocer la tensión en cualquier cara de normal  $\vec{n}$



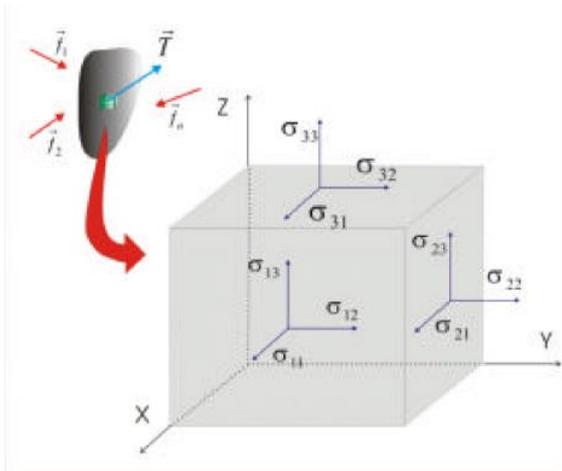
$$\vec{T} = \sigma^t \vec{n} \quad \text{ó} \quad T_i = \sigma_{ji} n_j$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



# ESFUERZOS PRINCIPALES

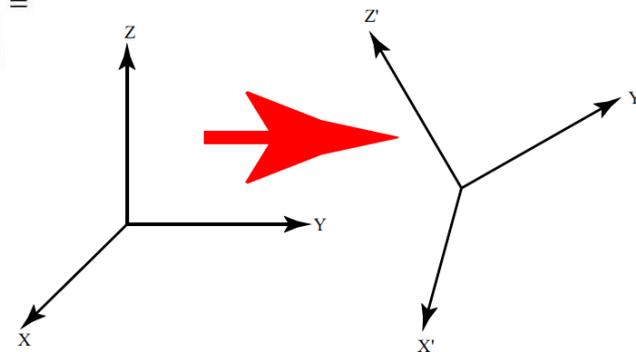
- Los esfuerzos normales y tangenciales en un punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja.
- Para cada punto de un cuerpo, se pueden definir tres planos perpendiculares entre sí, en los que no actúan componentes de esfuerzo de corte.
- Esto se llama **sistema principal de coordenadas**



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$

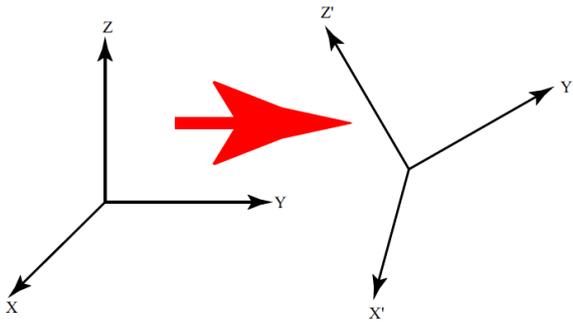
$$= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



# ESFUERZOS PRINCIPALES

- Los esfuerzos normales y tangenciales en un punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja.
- Para cada punto de un cuerpo, se pueden definir tres planos perpendiculares entre sí, en los que no actúan componentes de esfuerzo de corte.
- Esto se llama **sistema principal de coordenadas**
- Los esfuerzos normales que actúan sobre estos planos se conocen como **esfuerzos normales principales**.
- Los planos sobre los cuales estos esfuerzos principales actúan se conocen como **planos principales**.





Nuevo sistema de coordenadas tal que  
no haya esfuerzos de corte:  
Sistema principal de coordenadas

PARA HALLAR ESTE NUEVO SISTEMA PRINCIPAL DE COORDENADAS  
SE DEBE *DIAGONALIZAR* EL TENSOR DE TENSIONES

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{III}} \end{bmatrix}$$

Valores principales  
de tensión

La *diagonalización* es posible porque el tensor es *simétrico*



La expresión que relaciona los esfuerzos aplicados con los esfuerzos principales es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0$$

Donde  $\sigma$  es la magnitud del esfuerzo principal y  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  son los cosenos directores del vector unitario normal al plano principal.

Para que haya una solución el **determinante** de la matriz de los coeficientes debe ser **cero**.

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Las tres raíces del polinomio cúbico son los esfuerzos ppales (normales)  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Son siempre reales y quedan ordenadas de manera que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

### *Invariantes I del tensor de tensiones*

$$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2(\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32} = \\ = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I$$

$$I_3(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

Son **invariantes** porque son independientes del sistema de coordenadas



El tensor de tensiones se puede expresar como la suma de un tensor isotrópico y un tensor deviatorico

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

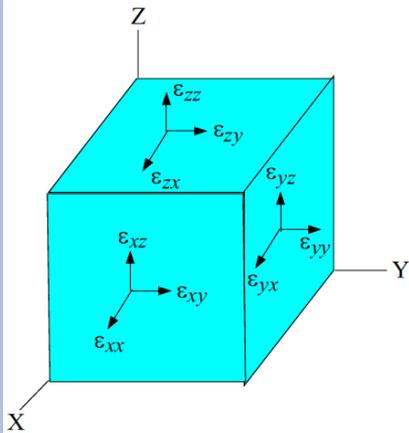
$$\sigma_0 = 1/3 (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

Llamamos  $J$  a los invariantes del tensor deviatorico



# Deformaciones

El tensor de las deformaciones  $\epsilon_{ij}$  caracteriza a las deformaciones sufridas por el cuerpo cuando se le aplican tensiones



$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

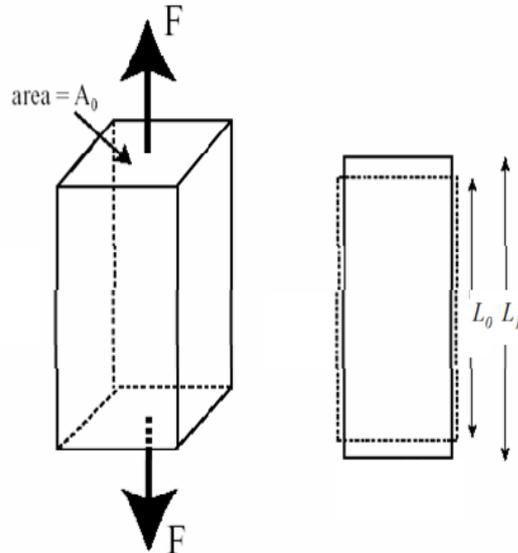
Deformaciones tangenciales

Deformaciones normales

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- Deformación normal: respuesta del material a la aplicación de la tensión. Se mide como el cambio relativo de longitud en la dirección de aplicación de la fuerza (lo que se estira o se encoge)

$$\epsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$



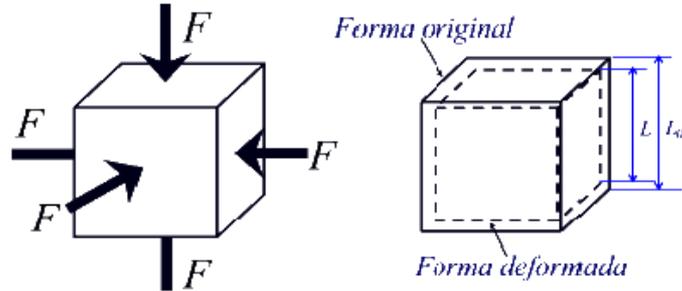
$\epsilon_{ii} > 0$  extensión  
 $\epsilon_{ii} < 0$  compresión



# Interpretación geométrica: deformación volumétrica.

La traza del tensor corresponde a la variación del volumen

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0}$$



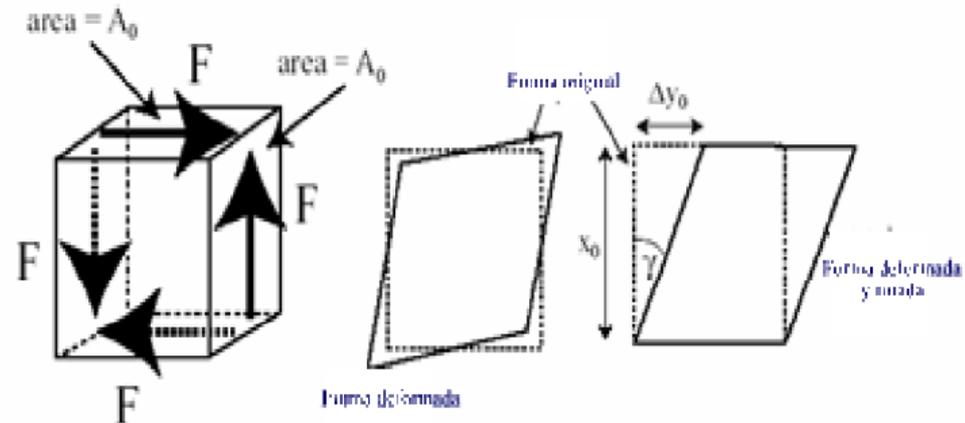
$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \theta > 0 \text{ dilatación}$$
$$\theta < 0 \text{ compresión}$$

Distorsión o  
cambio de forma  
Variación angular

- Deformación tangencial: mide cuando se distorsiona la forma al aplicar una la tensión de cortadura (la distorsión que sufre un ángulo que inicialmente era  $\pi/2$ ):

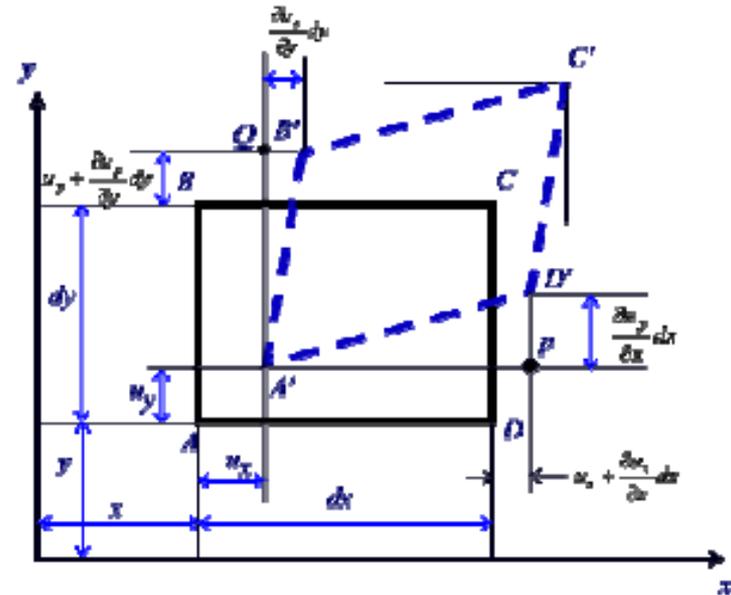
$$\gamma = \frac{\Delta y_0}{x_0} = \tan \gamma \approx \gamma$$

(si  $\gamma$  pequeño)



## Deformación plana

- Supongamos el paralelogramo ABCD. Bajo la acción de un campo de fuerzas, el paralelogramo se deforma según A'B'C'D'.
- Suponiendo desplazamientos pequeños, los desplazamientos relativos unitarios (por unidad de longitud) normales vendrán dados por:

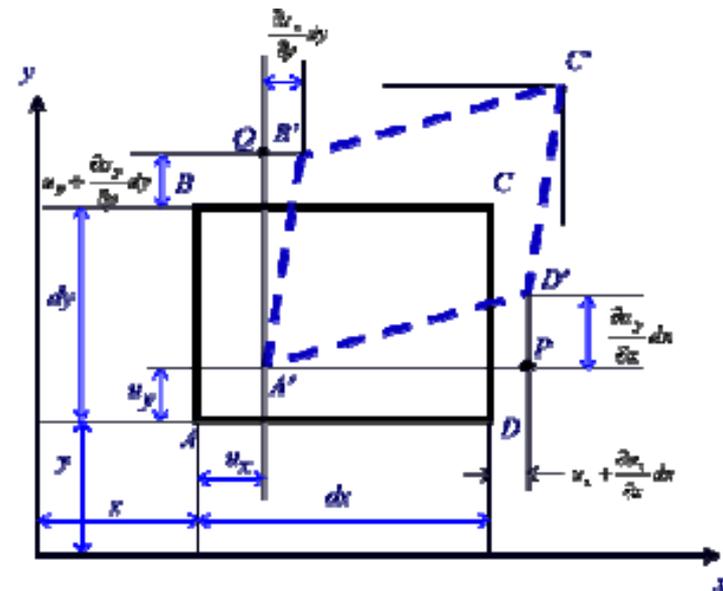


$$u_{xx} = \frac{A'D' - AD}{AD} \cong \frac{A'P - AD}{AD} = \frac{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$u_{yy} = \frac{A'B' - AB}{AB} \cong \frac{A'Q - AB}{AB} = \frac{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

## Deformación plana

- Además del cambio de dimensiones, el paralelogramo cambia de forma, por ej, el ángulo  $B'A'D'$  era inicialmente de  $90^\circ$ .
- Los desplazamientos relativos unitarios tangenciales miden este cambio de forma.
- Así por ej,  $u_{yx}$  mide el giro sufrido por el segmento  $A'D'$ , inicialmente paralelo al eje  $x$ :



$$u_{yx} = \text{ángulo } D' A' P = \arctan \frac{D' P}{A' P} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} \cong \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$u_{xy} = \text{ángulo } B' A' Q = \arctan \frac{B' Q}{A' Q} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy} \cong \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

# Deformaciones y direcciones principales

## 1. Representación del tensor de deformaciones en las direcciones principales

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

## 2. Invariantes I del tensor de deformaciones

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} = \\ &= \varepsilon_I \varepsilon_{II} + \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} + \varepsilon_{III} \varepsilon_I \end{aligned}$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_I \varepsilon_{II} \varepsilon_{III}$$

## 3. Invariantes J del tensor de deformaciones

$$J_1(\varepsilon) = I_1 = \varepsilon_{ii}$$

$$J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$$

$$J_3(\varepsilon) = \frac{1}{3}(I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$$



# Tensiones hidrostáticas y deformaciones volumétricas

Las deformaciones producen no sólo un cambio de volumen, si no también un cambio de la forma del cuerpo. Un estado de tensiones,  $\sigma_{ij}$ , contiene una componente hidrostática  $\sigma_h$ , que se expresa:

$$\sigma_h = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$$

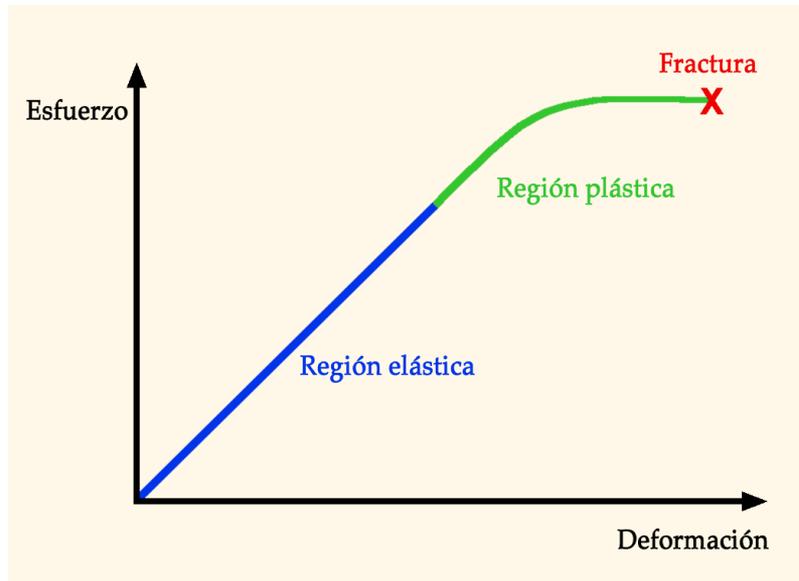
La componente hidrostática de las tensiones produce sólo una deformación volumétrica del cuerpo que vendrá dada por:

$$\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii}$$



# Ley de Hooke

## Parámetros Elásticos



Considerando un cuerpo elástico la relación entre las tensiones y las deformaciones viene dada por la Ley de Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$\sigma_{ij}$ : tensor de tensiones

$\varepsilon_{kl}$ : tensor de deformaciones

$C_{ijkl}$ : tensor elástico de 4º orden (81 comp)

**Esta ecuación establece la relación lineal entre tensión y deformación**

Asumiendo:

- Simetría del tensor de tensiones
- Simetría del tensor de deformaciones
- Energía de deformación

 Parámetros elásticos independientes: 81 a 21



EN UN MEDIO ELÁSTICO, HOMOGÉNEO E ISÓTROPICO,  
EL NÚMERO DE PARÁMETROS SE REDUCE A 2:  $\lambda$  Y  $\mu$   
(COEFICIENTES DE LAMÉ), CON

$$C_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}),$$

QUEDANDO ASÍ EXPRESADA LA LEY DE HOOKE:

$$\sigma_{IJ} = \lambda \delta_{IJ} \varepsilon_{KK} + 2\mu \varepsilon_{IJ} \quad (\theta = \varepsilon_{KK})$$

---

HOMOGÉNEO: PROPIEDADES FÍSICAS IGUALES PARA CADA UNO DE LOS PUNTOS DEL CUERPO

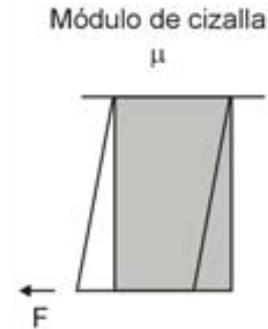
ISÓTROPICO: MISMAS PROPIEDADES FÍSICAS EN TODAS LAS DIRECCIONES



## PARÁMETROS O COEFICIENTES ELÁSTICOS

**$\mu$ : módulo (coeficiente) de rigidez o de corte:** es una medida de la resistencia del material al esfuerzo de corte

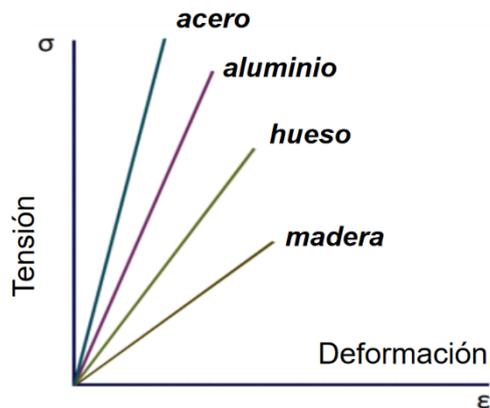
$$\mu = \sigma_{ij} / 2\varepsilon_{ij}$$



# PARÁMETROS O COEFICIENTES ELÁSTICOS

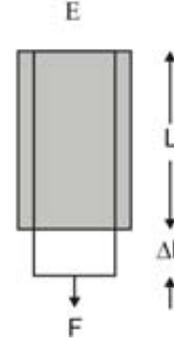
**E: módulo de Young:** relación entre la tensión axial aplicada y la deformación longitudinal en la misma dirección

$$E = \sigma_{ii} / \epsilon_{ii}$$



$$E_{acero} > E_{aluminio} > E_{hueso} > E_{madera}$$

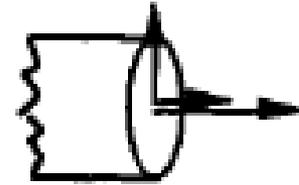
Módulo de Young



**$\nu$  : ( $\sigma$ ) relación de Poisson:** relación entre la contracción lateral de un cilindro y la extensión longitudinal cuando se aplica una tensión en los extremos.

$$\sigma = - \epsilon_{ii} / \epsilon_{jj}$$

varía entre 0 y 0.5



**$\nu$  : ( $\sigma$ ) relación de Poisson:** relación entre la contracción lateral de un cilindro y la extensión longitudinal cuando se aplica una tensión en los extremos.

$$\sigma = - \epsilon_{ii} / \epsilon_{jj}$$

varía entre 0 y 0.5

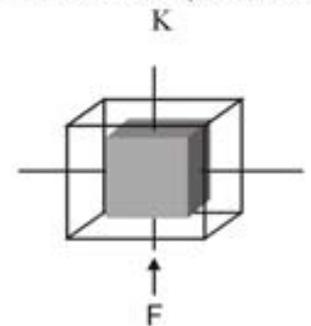


**K: módulo de volumen, de compresibilidad o de Bulk:** es la resistencia del material al cambio de volumen cuando se lo somete a presión litostática. Se define por la relación entre la presión ejercida y el cambio de volumen inducido

$$K = -P/\theta$$

$$(\theta = \epsilon_{ii})$$

Módulo de compresibilidad



Para muchos materiales de la tierra,

$\mu = \lambda$  (sólido de Poisson),  $\sigma = 0.25$

y  $K = 5/3 \mu$ .

## RELACIONES ENTRE MÓDULOS

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

(En los fluidos ideales,  $K = \lambda$ )

Unidades...  
1 Pa = 1 N / m<sup>2</sup> = 1 kg m<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>  
1 bar = 10<sup>5</sup> Pa  
1 Kbar = 10<sup>8</sup> Pa = 100 MPa  
1 Mbar = 10<sup>11</sup> Pa = 100 GPa



## Algunos valores.....

	K (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\lambda$ (GPa)	$\sigma$	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )
Agua	2.1	0	2.1	0.5	1
Arenisca	17	6	13	0.34	1.9
Olivina	129	82	74	0.24	3.2

Para la **corteza terrestre**  $\mu$  es aproximadamente  $3 \times 10^{11}$  dinas/cm<sup>2</sup> y el módulo de Young **E**, considerando un sólido de Poisson, es  $7.5 \times 10^{11}$  dinas/cm<sup>2</sup>.

