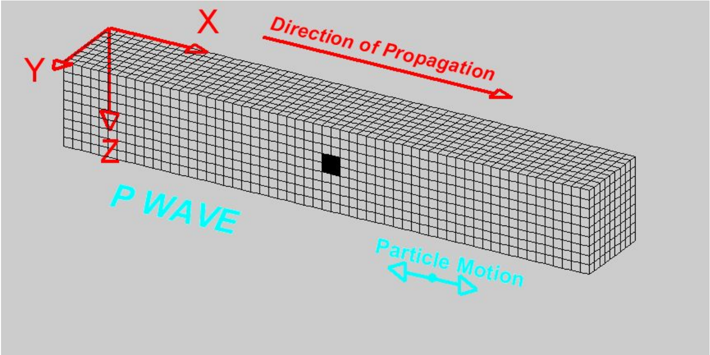
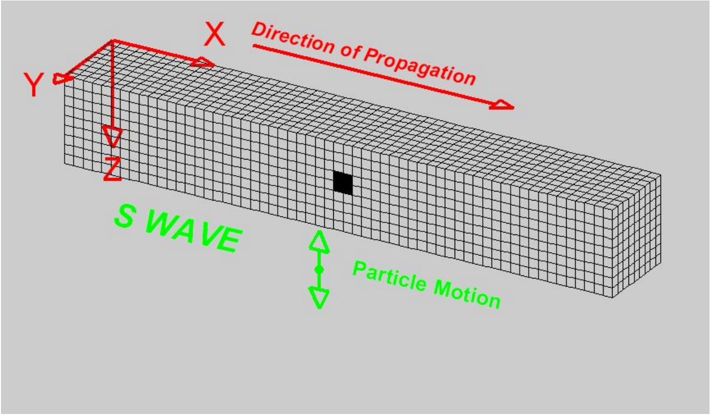
Ecuación de Movimiento

Ecuación escalar de onda





Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

La energía producida por un terremoto se propaga en el interior terrestre en todas las direcciones en forma de ondas elásticas.

- Analizaremos la propagación de estas ondas en un medio elástico isótropo y homogéneo.
- Conociendo las tensiones actuantes (σ_{ij}), las deformaciones experimentadas (ε_{ij}), la relación entre ellas (Ley de Hooke) y los módulos elásticos, podemos plantear la **ecuación de movimiento.**

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

La **ecuación de movimiento** para un medio continuo (adaptación de la 2da ley de Newton F=ma) en términos de las fuerzas de superficie y de cuerpo:

$$\underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}(\vec{x},t)}{\partial x_j}}_{\text{Fuerzas de superficie}} + \underbrace{f_i(\vec{x},t)}_{\text{Fuerzas de cuerpo}} = \rho \frac{\partial^2 u_i(\vec{x},t)}{\partial t^2}$$

Considerando que estamos **lejos de la fuente,** obtenemos la **ecuación homogénea** de movimiento:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x},t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\vec{x},t)}{\partial t^2}$$

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

- La ecuación de movimiento tiene como **solución** una ecuación de onda que describe los **dos tipos de ondas sísmicas** (o elásticas) que se propagan, las ondas compresionales y las ondas de corte.

- Estas ondas se propagan de manera diferente, con velocidades que dependen de las propiedades elásticas del material.

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

Reemplazando tensiones y deformaciones en:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x},t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(\vec{x},t)}{\partial t^2}$$

Obtenemos:

$$\boxed{(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x},t))+\mu\vec{\nabla}^2\vec{u}(\vec{x},t) = \rho\frac{\partial^2\vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t^2}}$$

Ecuación de movimiento para un medio elástico e isótropo en términos del desplazamiento que depende de la posición y el tiempo.

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

Para resolver esta ecuación, expresamos el campo de desplazamiento como la suma de dos **funciones potenciales:**

$$\boxed{\vec{u}(\vec{x},t) = \underbrace{\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)}_{} + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\Gamma}(\vec{x},t)}_{}}$$

Gradiente de un **potencial escalar,** con rotor nulo

Rotor de un **potencial vectorial**, con divergencia nula

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\Gamma}) = 0$$

Da origen a **ondas compresionales**

Da origen a **ondas de corte**

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

Sustituyendo la expresión del desplazamiento en la ecuación de movimiento nos queda:

$$\vec{\nabla}\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi(\vec{x},t)-\rho\frac{\partial^2\phi(\vec{x},t)}{\partial t^2}\right]=-\vec{\nabla}\times\left[\mu\vec{\nabla}^2\vec{\Gamma}-\rho\frac{\partial^2\vec{\Gamma}(\vec{x},t)}{\partial t^2}\right]$$

Una solución posible es cuando ambos términos entre corchetes son cero. En ese caso tenemos **dos ecuaciones de onda**, una para cada potencial.

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

El **potencial escalar** satisface:

$$\boxed{\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2}}$$

Con velocidad:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Esta solución corresponde a ondas compresionales u **ondas P**

Ecuación de Movimiento
Ecuación escalar de onda

El **potencial vectorial** satisface:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{\Gamma} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\vec{\Gamma}(\vec{x},t)}{\partial t^2}}$$

Con velocidad:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Esta solución corresponde a ondas de corte u **ondas S**