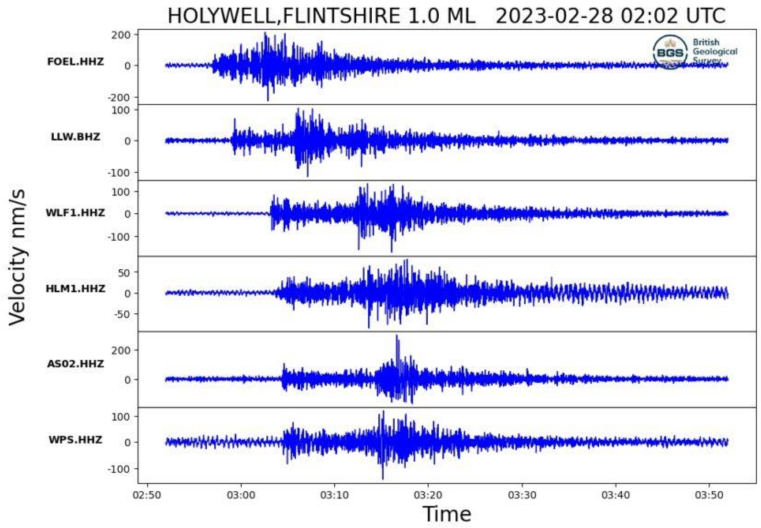
Teoría Medio Elástico

Ecuaciones de la Mecánica
Medio continuo deformable

Terremotos



Tensiones

Deformaciones

Consideramos que la Tierra es un medio elástico y continuo sometido a fuerzas:

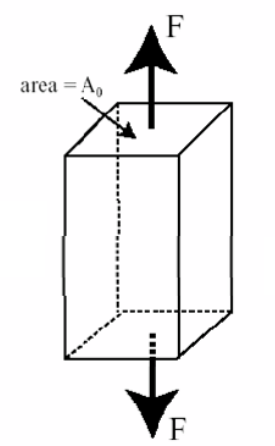
- Tensión
- Deformación
- Desplazamiento

Elementos constituyentes son funciones de las coordenadas y del tiempo

Consideramos que la Tierra es un medio elástico y continuo sometido a fuerzas:

- Tensión
- Deformación
- Desplazamiento

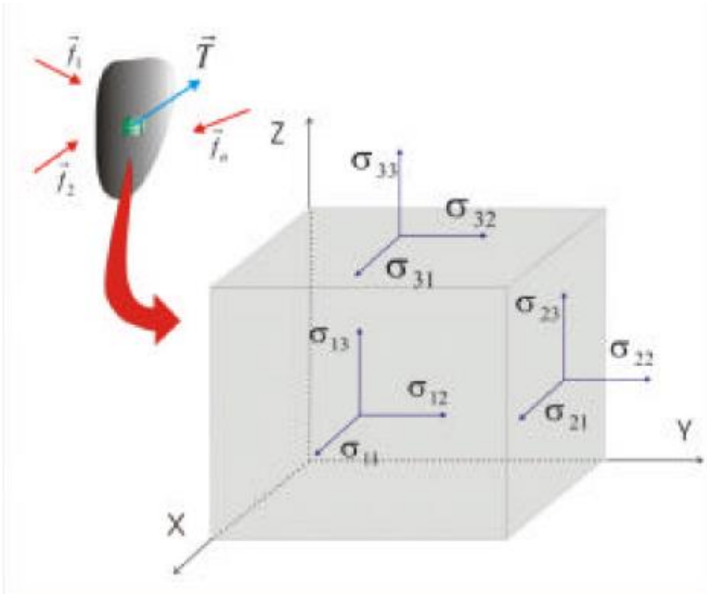
Elementos constituyentes son funciones de las coordenadas y del tiempo



- <u>Tensión normal</u>: Intensidad de fuerza normal por unidad de superficie

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$ Unidades: Pa (N/m^2) (suelen utilizarse los MPa)

Tensor de tensiones (de 2º orden)



cara

dirección

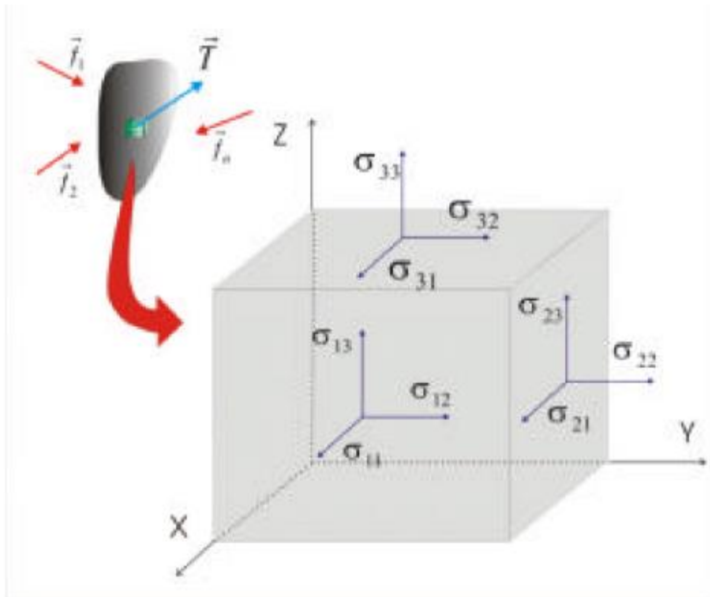
Componentes tangenciales

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}$$

Componentes normales

Nos permite conocer el estado de tensión de un cuerpo o región

Tensor de tensiones (de 2º orden)



cara

dirección

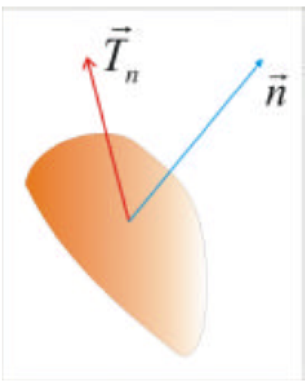
Componentes tangenciales

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}$$

Componentes normales

Nos permite conocer el estado de tensión de un cuerpo o región

Fórmula de Cauchy: Nos permite conocer la tensión en cualquier cara de normal ň



$$\vec{T} = \sigma^t \vec{n} \quad ó \quad T_i = \sigma_{ji} n_j$$

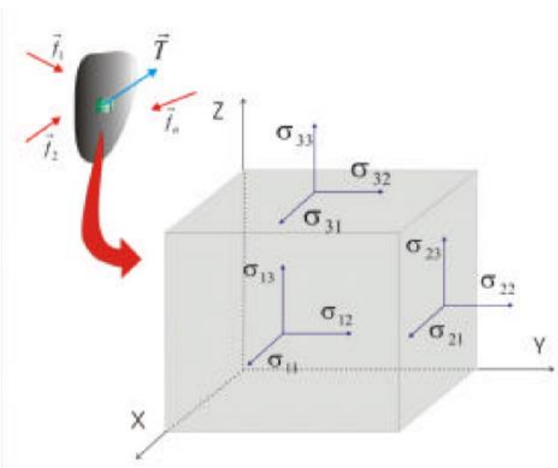
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

ESFUERZOS PRINCIPALES

•Los esfuerzos normales y tangenciales en un punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja.

•Para cada punto de un cuerpo, se pueden definir tres planos perpendiculares entre sí, en los que no actúan componentes de esfuerzo de corte.

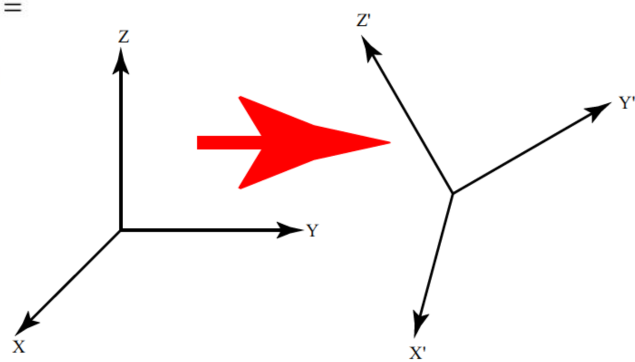
•Esto se llama **sistema principal de coordenadas**



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}$$



ESFUERZOS PRINCIPALES

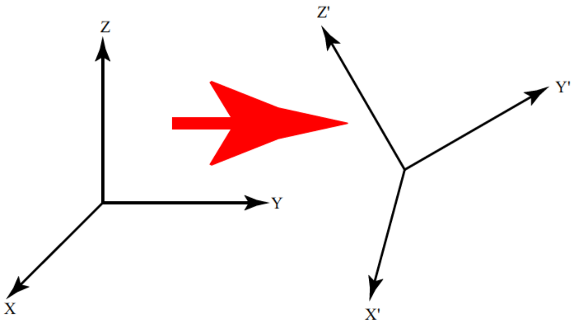
•Los esfuerzos normales y tangenciales en un punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja.

•Para cada punto de un cuerpo, se pueden definir tres planos perpendiculares entre sí, en los que no actúan componentes de esfuerzo de corte.

•Esto se llama **sistema principal de coordenadas**

•Los esfuerzos normales que actúan sobre estos planos se conocen como **esfuerzos normales principales**.

•Los planos sobre los cuales estos esfuerzos principales actúan se conocen como **planos principales**.



Nuevo sistema de coordenadas tal que no haya esfuerzos de corte: Sistema principal de coordenadas

PARA HALLAR ESTE NUEVO SISTEMA PRINCIPAL DE COORDENADAS SE DEBE *DIAGONALIZAR* EL TENSOR DE TENSIONES

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}} \end{bmatrix}$$

Valores principales de tensión

La *diagonalización* es posible porque el tensor es simétrico

La expresión que relaciona los esfuerzos aplicados con los esfuerzos principales es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0$$

Donde σ es la magnitud del esfuerzo principal y n_x, n_y, n_z son los cosenos directores del vector unitario normal al plano principal.

Para que haya una solución el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser cero.

$$\boxed{\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0}$$

Las tres raíces del polinomio cúbico son los esfuerzos ppales (normales) σ_1, σ_2 y σ_3. Son siempre reales y quedan ordenadas de manera que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}} \end{bmatrix}$$

Invariantes I del tensor de tensiones

$$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2(\sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32} =$$
$$= \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I$$

$$I_3(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

Son invariantes porque son independientes del sistema de coordenadas

El tensor de tensiones se puede expresar como la suma de un tensor isotrópico y un tensor deviatórico

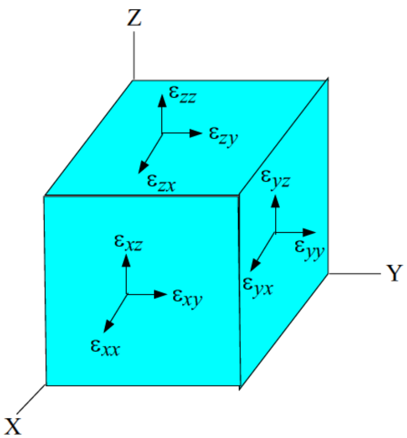
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = 1/3\,(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

Llamamos J a los invariantes del tensor deviatórico

Deformaciones

El tensor de las deformaciones ε_{ij} caracteriza a las deformaciones sufridas por el cuerpo cuando se le aplican tensiones



$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

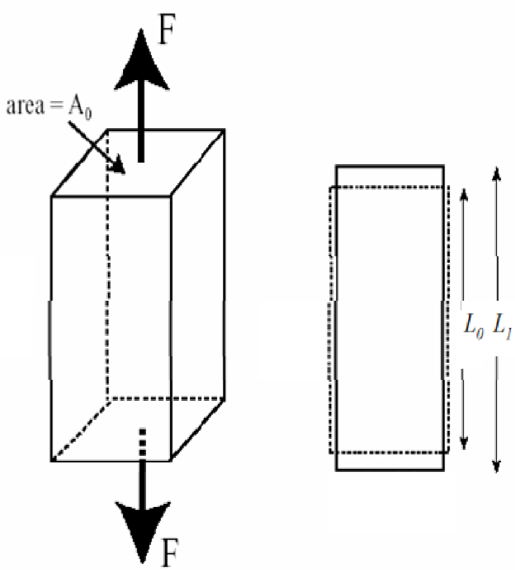
Deformaciones tangenciales

Deformaciones normales

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

- <u>Deformación normal</u>: respuesta del material a la aplicación de la tensión. Se mide como el cambio relativo de longitud en la dirección de aplicación de la fuerza (lo que se estira o se encoge)

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$



$\varepsilon_{ii} > 0$ extensión

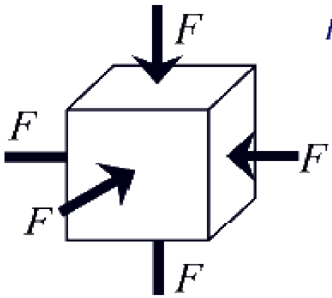
$\varepsilon_{ii} < 0$ compresión

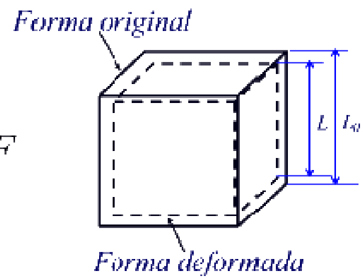
Interpretación geométrica: deformación volumétrica.
La traza del tensor corresponde a la variación del volumen

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0}$$

$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \theta > 0$ dilatación

$\theta < 0$ compresión

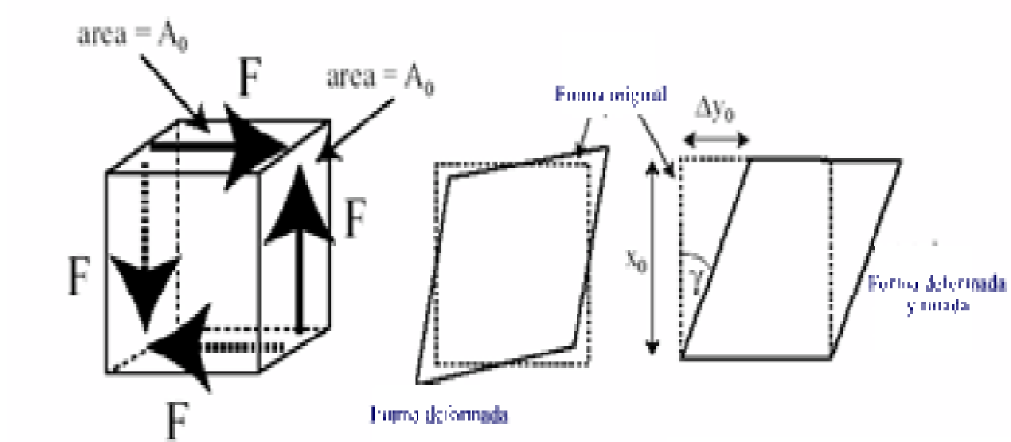




- Deformación tangencial: mide cuando se distorsiona la forma al aplicar una la tensión de cortadura (la distorsión que sufre un ángulo que inicialmente era $\pi/2$):

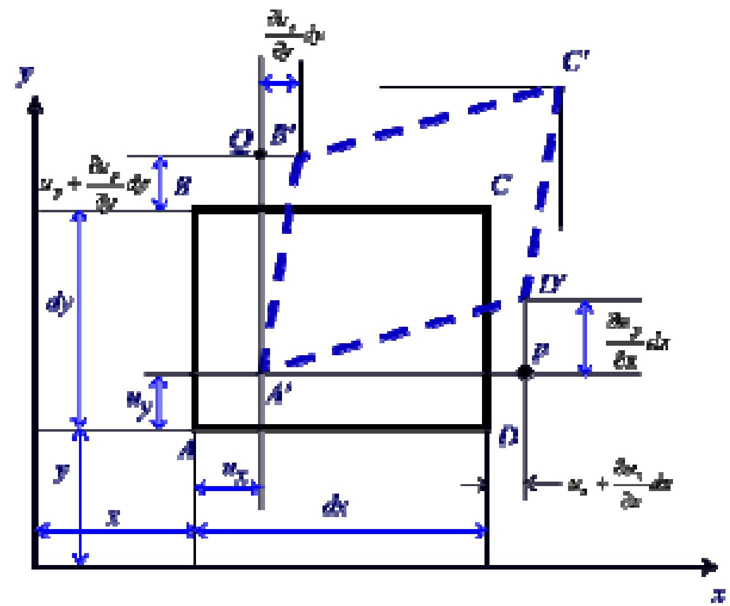
$$\gamma = \frac{\Delta y_0}{x_0} = \tan\gamma \approx \gamma \quad \text{(si } \gamma \text{ pequeño)}$$

Distorsión o cambio de forma
Variación angular



Deformación plana

- Supongamos el paralelogramo ABCD. Bajo la acción de un campo de fuerzas, el paralelogramo se deforma según A'B'C'D'.
- Suponiendo desplazamientos pequeños, los desplazamientos relativos unitarios (por unidad de longitud) normales vendrán dados por:

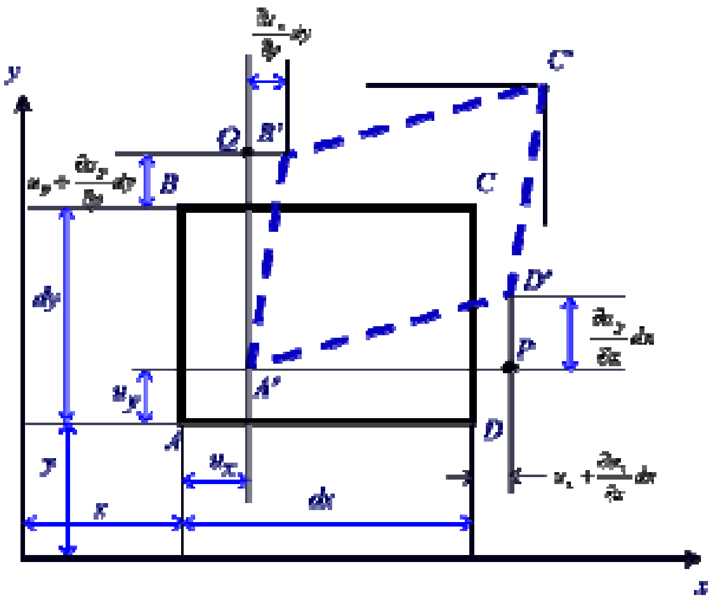


$$u_{xx} = \frac{A'D' - AD}{AD} \cong \frac{A'P - AD}{AD} = \frac{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$u_{yy} = \frac{A'B' - AB}{AB} \cong \frac{A'Q - AB}{AB} = \frac{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Deformación plana

- Además del cambio de dimensiones, el paralelogramo cambia de forma, por ej, el ángulo B'A'D' era inicialmentede 90º.
- Los desplazamientos relativos unitarios tangenciales miden este cambio de forma.
- Así por ej, u_{yx} mide el giro sufrido por el segmento A'D', inicialmente paralelo al eje x:



$$u_{yx} = ángulo\ \ D'A'P = \arctan\frac{D'P}{A'P} = \frac{\dfrac{\partial u_y}{\partial x}dx}{dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx} \cong \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$u_{xy} = ángulo\ \ B'A'Q = \arctan\frac{B'Q}{A'Q} = \frac{\dfrac{\partial u_x}{\partial y}dy}{dy + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}dy} \cong \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Deformaciones y direcciones principales

1. Representación del tensor de deformaciones en las direcciones principales

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

2. Invariantes I del tensor de deformaciones

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

$$I_2(\varepsilon) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} =$$
$$= \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_{III}\varepsilon_I$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}$$

3. Invariantes J del tensor de deformaciones

$$J_1(\varepsilon) = I_1 = \varepsilon_{ii}$$

$$J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + 2I_2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$$

$$J_3(\varepsilon) = \frac{1}{3}\left(I_1^3 + 3I_1I_2 + 3I_3\right) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$$

Tensiones hidrostáticas y deformaciones volumétricas

Las deformaciones producen no sólo un cambio de volumen, si no también un cambio de la forma del cuerpo. Un estado de tensiones, σ_{ij}, contiene una componente hidrostática σ_h, que se expresa:

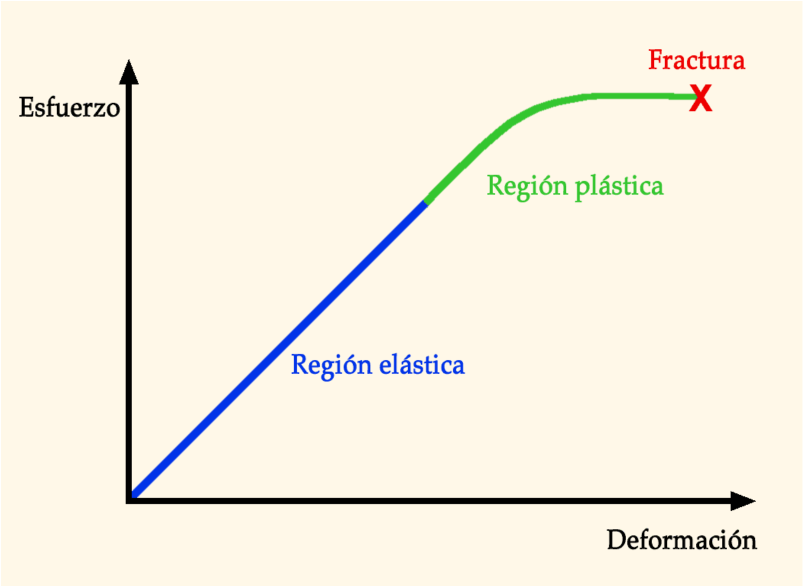
$$\sigma_h = \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)/3$$

La componente hidrostática de las tensiones produce sólo una deformación volumétrica del cuerpo que vendrá dada por:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}$$

Ley de Hooke

Parámetros Elásticos



Considerando un cuerpo elástico la relación entre las tensiones y las deformaciones viene dada por la Ley de Hooke,

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}}}$$

σ_{ij}: tensor de tensiones
ε_{kl}: tensor de deformaciones
C_{ijkl}: tensor elástico de 4º orden (81 comp)

Esta ecuación establece la relación lineal entre tensión y deformación

Asumiendo:

- Simetría del tensor de tensiones
- Simetría del tensor de deformaciones
- Energía de deformación

➡ Parámetros elásticos independientes: 81 a 21

En un **medio elástico, homogéneo e isótropo**, el número de parámetros se reduce a 2: λ y μ (coeficientes de Lamé), con

$$C_{IJKL} = \lambda\delta_{IJ}\,\delta_{KL} + \mu(\delta_{IK}\,\delta_{JL} + \delta_{IL}\,\delta_{JK}),$$

quedando así expresada la Ley de Hooke:

$$\boxed{\sigma_{IJ} = \lambda\delta_{IJ}\,\varepsilon_{KK} + 2\mu\,\varepsilon_{IJ}} \qquad (\theta = \varepsilon_{KK})$$

---

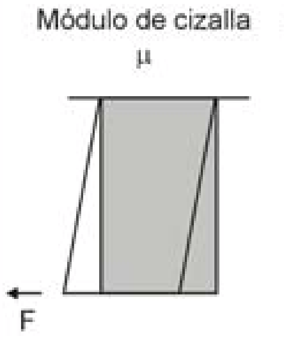
homogéneo: propiedades físicas iguales para cada uno de los puntos del cuerpo

isótropo: mismas propiedades físicas en todas las direcciones

PARÁMETROS O COEFICIENTES ELÁSTICOS

μ: módulo (coeficiente) de rigidez o de corte: es una medida de la resistencia del material al esfuerzo de corte

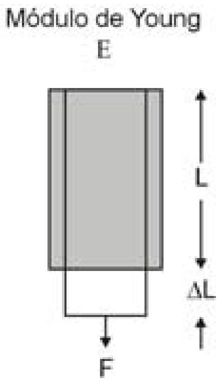
$$\mu = \sigma_{ij} / 2\varepsilon_{ij}$$



Parámetros o coeficientes elásticos

E: módulo de Young: relación entre la tensión axial aplicada y la deformación longitudinal en la misma dirección

$$E = \sigma_{ii} / \varepsilon_{ii}$$

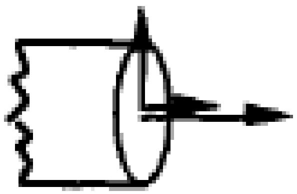


$E_{acero} > E_{aluminio} > E_{hueso} > E_{madera}$

υ : (σ) relación de Poisson: relación entre la contracción lateral de un cilindro y la extensión longitudinal cuando se aplica una tensión en los extremos.

$\boxed{\sigma = - \varepsilon_{ii} / \varepsilon_{jj}}$

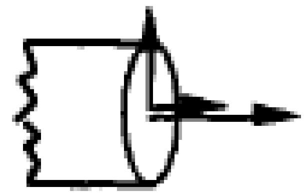
varía entre 0 y 0.5



υ : **(σ) relación de Poisson**: relación entre la contracción lateral de un cilindro y la extensión longitudinal cuando se aplica una tensión en los extremos.

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_{ii} / \varepsilon_{jj}}$$

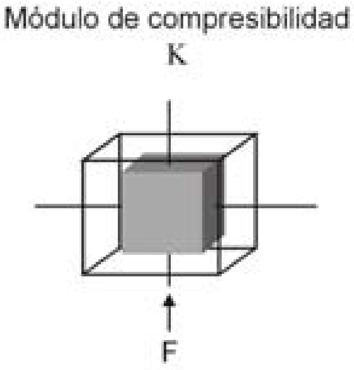
varía entre 0 y 0.5



K: módulo de volumen, de compresibilidad o de Bulk: es la resistencia del material al cambio de volumen cuando se lo somete a presión litostática. Se define por la relación entre la presión ejercida y el cambio de volumen inducido

$$\boxed{K = -P/\theta}$$

$(\theta = \varepsilon_{ii})$



RELACIONES ENTRE MÓDULOS

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad K = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu$$

(En los fluidos ideales, $K=\lambda$)

Unidades... $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N}/\text{m}^2 = 1\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$

$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$

$1\ \text{Kbar} = 10^8\ \text{Pa} = 100\ \text{MPa}$

$1\ \text{Mbar} = 10^{11}\ \text{Pa} = 100\ \text{GPa}$

Para algunos materiales de La Tierra,
$\mu = \lambda$ (sólido de Poisson), $\sigma = 0.25$
y $K = 5/3\ \mu$.

Algunos valores.....

	K (GPa)	μ (GPa)	λ (GPa)	σ	ρ (g/cm^3)
Agua	2.1	0	2.1	0.5	1
Arenisca	17	6	13	0.34	1.9
Olivina	129	82	74	0.24	3.2

Para la corteza terrestre **μ** es aproximadamente 3 x10^{11} dinas/cm^2 y el módulo de Young **E**, considerando un sólido de Poisson, es 7.5x10^{11} dinas/cm^2.